Clarken Avaruusseikkailu ja Newtonin gravitaatiolaki

Stanislav Bartoň†, Veikko Keränen‡

†Opole University of Technology
Faculty of Electrical Engineering, Automatic Control and Informatics
Department of Informatics
Prószkowska 76 Street, 45-758 Opole, Poland
s.barton@po.opole.pl

‡Lapland University of Applied Sciences
School of Industry and Natural Resources,
Jokiväylä 11, 96300 Rovaniemi, Finland
veikko.keranen@lapinamk.fi

10. maaliskuuta 2019

Tiivistelmä

Kuuluisassa Avaruusseikkailu (Space Odyssey) -tetralogiassaan A.C. Clarke kutsuu massiivisen suorakulmaisen särmiön, monoliitin, gravitaatiokentässä liikkuvan massapisteen radan laskemista klassiseksi gravitaatiomekaniikan ongelmaksi. Tässä artikkelissa esitetään ratkaisu kyseiseen probleemaan Newtonin gravitaatioteoriaa käyttäen ja havaitaan että tietyssä alkutilanteessa liikeradat ovat kaoottisia. Aluksi tarkastellaan homogeenisen pallon tapausta ja yleistetään Newtonin gravitaatiolakia niin, että monoliitin gravitaatiokentän käsittely tulee mahdolliseksi. Tämän jälkeen verrataan monoliitin ja homogeenisen pallon aiheuttamia gravitaatiokenttiä keskenään sekä kehitetään laskentaympäristö, jossa yleisestä alkutilanteesta lähtien voidaan ratkaista monoliitin gravitaatiokentässä tapahtuvan vapaan pudotuksen liikeradat. Viimeisessä kappaleessa tarkastellaan monoliitin tasapotentiaalipintojen muodostamista. Symbolisten ja numeeristen laskelmien yhdistäminen sekä tulosten visualisointi tehdään Maple-laskentaympäristössä.

1 Johdanto

A.C. Clarken Avaruusseikkailuteoksissa, Space Odyssey [3, 4], käsitellään avaruusaluksen liikettä monoliitin gravitaatiokentässä tilanteessa, jossa monoliitin sivujen suhteet ovat 1:4:9. Clarke kutsuu radan laskemista klassiseksi gravitaatiomekaniikan ongelmaksi. Tulemme kuitenkin näkemään, ettei Newtonin liikeyhtälöiden soveltaminen ole tässä tilanteessa aivan suoraviivaista ja että liikeradat voivat olla kaoottisia.

2 Newtonin gravitaatiolaki

Tarkastellaan kahta massapistettä m_1 ja m_2. Olkoon ensimmäinen massapiste koordinaatiston origossa ja toinen massapiste kohdassa (x, y, z). Newtonin gravitaatiolain [5] mukaan nämä massapisteet vetävät toisiaan puoleensa voimalla $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \mp \frac{\kappa\, m_1\, m_2}{x^2 + y^2 + y^2}\, \vec{e}_{12}, \quad \text{missä} \quad \begin{array}{rcl} \kappa & = & \text{Newtonin gravitatiovakio} \\ \vec{e}_{12} & = & \text{massapisteitä } m_1 \text{ ja } m_2 \text{ yhdistävän} \\ & & \text{janan suuntainen yksikkövektori} \end{array} \tag{1}$$

Tämä vetovoimalaki voidaan yleistää koskemaan kahta homogeenista palloa niin, että pallojen massat voidaan ajatella sijaitsevan pallojen keskipisteessä. Tarkastellaan seuraavaksi tämän yleistyksen johtamista.

Olkoon homogeneenisen pallon, massa M_1 ja säde R, keskipiste origossa ja sijaitkoon masapiste m_2 kohdassa $(x, 0, 0)$, $x > R$. Pallon aiheuttaaman vetovoiman suuruutta $|F| = \kappa\, m_2\, M_1\, x^{-2}$ ei voi suoraan johtaa laskemalla määrätty integraali $|F| = \kappa\, m_2 \int_{M_1} x^{-2}\, dM_1$, koska pallon geometrinen rakenne on erilainen kuten kuvasta 1 nähdään. Seuraavassa lasketaan ensin massapisteen m_2 potentiaalienergia pallon M_1 gravitaatiokentässä.

2.1 Potentiaalienergia

Massapisteen m_2 potentiaalienergia massapisteen m_1 gravitaatiokentässä on yhtäsuuri kuin työ, joka vaaditaan siirtämään massa m_2 nykyisestä sijainnistaan äärettömän kauas. Oletetaan että massapistettä m_2 siirretään pitkin yleistä parametrisesti määrättyä avaruuskäyrää, jonka paikkavektoriesitys on $\vec{S} = [x(p), y(p), z(p)]$, missä p on parametri. Kun m_2 siirtyy differentiaalisen matkan $d\vec{S}$, voidaan yhtälöä (1) ja differentiaalisen työn esitystä $dW = \vec{F} \cdot d\vec{S}$ käyttäen määrittää vastaava potentiaalienergia W:

$$W = \kappa\, m_1\, m_2 \int_p^\infty \frac{\frac{\mathrm{d}\, R(p)}{\mathrm{d}p}}{R(p)^2}\, \mathrm{d}p = \frac{\kappa\, m_1\, m_2}{R(p)}, \text{ missä } R(p) = \sqrt{x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2}. \tag{2}$$

Jos potentiaalienergia W tunnetaan, gravitaatiovoima voidaan määrittää käyttämällä relaatiota $\vec{F} = -\nabla W$.

2.2 Homogeenisen pallon ja massapisteen välinen gravitaatiovoima

Kohdassa (X, Y, Z) sijaitsevan pistemäisen massan dM potentiaalienergia W voidaan nyt laskea homogeenisen pallon gravitaatiokentässä. Oletetaan että pallon keskipiste sijaitsee origossa ja olkoon sen massa m ja säde R. Kuten kuvasta 1 nähdään, pallon differentiaalinen massa-alkio dm esitetään sylinterikoordinaattien avulla. Pallon tiheys on $\rho = \frac{3\, m}{4\, \pi\, R^3}$. Potentiaalienergia W saa määrättyjen integraalien avulla muodon

$$W = \kappa\, \mathrm{d}M \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho\, r}{\sqrt{(X - x)^2 + r^2}}\, \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}x, \tag{3}$$

josta gravitaatiovoima saadaan laskujen jälkeen muotoon

$$F = -\frac{\kappa\, m\, \mathrm{d}M}{X^2}. \tag{4}$$

Kohdasta (4) nähdään että gravitaatiovuorovaikutus homogeenisen pallon ja massapisteen välillä määräytyy saman lain perusteella kuin gravitaatiovuorovaikutus kahden massapisteen välillä, kts. kohta (1). Yleistys kahden pallon gravitaatiovuorovaikutukselle saadaan toistamalla sama prosessi. Havaitaan että pallojen välinen painovoima on yhtä suuri kuin jos kummankin pallon massa olisi kokonaan keskittynyt niiden keskipisteeseen.

2.3 Gravitaatiokenttä homogeenisen pallon sisällä

Olkoon piste P homogeenisen pallon S sisällä. Tarkastellaan pisteen P ulkopuolella olevaa onttoa palloa, siis sitä osaa pallosta S, jonka säde on suurempi kuin pisteen P etäisyyys pallon keskipisteestä. Tämä ontto pallo voidaan jakaa differentiaalista vahvuutta dr oleviin samankeskisiin pallon kuoriin ja lopulta osoittaa, että pisteen P ulkopuolella olevan onton pallon aiheuttama gravitaatiovuorovaikutus häviää kokonaan. Yksityiskohtaiset laskelmat löytyvät artikkelista [1]. Sama tulos saadaan myös Gaussin lain avulla, jonka mukaan gravitaatiovuo (gravitaatiokentän pintaintegraali) minkä tahansa suljetun pinnan läpi on suoraan verrannollinen pinnan sisällä olevaan massaan. Onton pallon tapauksessa sisäpuolinen massa on luonnollisesti nolla, joten siellä jokaisessa pisteessä gravitaatiovuo – ja näin ollen myös kiihtyvyys – on nolla. Lopputulokseksi saadan siis, että pisteeseen P kohdistuva gravitaatiovoima tulee vain siitä osasta täyttä palloa, jonka säde on pienempi kuin pisteen P etäisyys pallon keskipisteestä.

Homogeenisen pallon, säde R_s ja massa M_s (sama kuin monoliitin massa), etäisyydellä d aikaansaama testimassan dM kiihtyvyys A_s on pallon sisä ja ulkopuolella seuraava:

$$A_s = \frac{\kappa\, d\, M_s}{R_s^3} \text{ kun } d \le R_s,\; A_s = \frac{\kappa\, M_s}{R_s^2} \text{ kun } d \ge R_s, \text{ missä } \begin{array}{rcl} R_s &=& \frac{3\,T}{\sqrt[3]{\pi}} \\ T &=& \text{monoliitin lyhimmän} \\ & & \text{sivun pituus} \end{array} \tag{5}$$

Perustellaan vielä kohdassa (5) olevaa pallon sisäpuolista kiihtyvyyttä. Todellakin, kun $d \le R_s$, on keskipisteestä etäisyydellä d olevan pallon massa M_d yhtäsuuri kuin mittakaavan kuutio kertaa M_s. Näin ollen $A_s = \frac{\kappa\, M_d}{d^2} = \frac{\kappa\,(\frac{d^3}{{R_s}^3})M_s}{d^2} = \frac{\kappa\, d\, M_s}{R_s^3}$.

Jatkossa monoliitin massa on sama kuin edellä mainittu M_s.

3 Avaruusseikkailun monoliitin gravitaatiokenttä

Lasketaan monoliitin gravitaatiokiihtyvyys $\vec{A} = [A_x, A_y, A_z]$ Maple 13 ohjelman avulla. Tässä esitetään vain x-akselin suuntaisen kiihtyvyyden A_x laskeminen. Kiihtyvyydet A_y ja A_z saadaan vastaavasti.

3.1 Monoliitin gravitaatiovoima

Esitetään kiihtyvyysvektori SI-yksikköjärjestelmässä, jolloin sen pituuden yksikkö on $[|\vec{A}|]_{SI} = \mathrm{m\,s^{-2}}$. Laskuissa käytettävän kiihtyvyysvektorin numeeriset komponentit ovat laaduttomia ja todellisen kiihtyvyyden saamiseksi ne tulee kertoa pituuden yksiköllä (m), materian tiheydellä ρ, olettaen että $\rho = 2000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ja Newtonin gravitatiovakiolla $\kappa = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}\,kg^{-1}}$, mikä antaa kokonaiskertoimeksi $1.335 \cdot 10^{-7}\mathrm{m\,s^{-2}}$. Tämä kerroin on pieni, eikä sitä ole tarpeellista käyttää suhteellisen kiihtyvyyden laskemisen välivaiheissa. Ainoastaan lopputulos tulee kertoa tällä arvolla todellisen kiihtyvyyden laskemiseksi. Menettely luonnollisesti vaikuttaa myös käytettävien aika-askeleiden kokoon.

Kirjoitetaan alkuosa koodista:

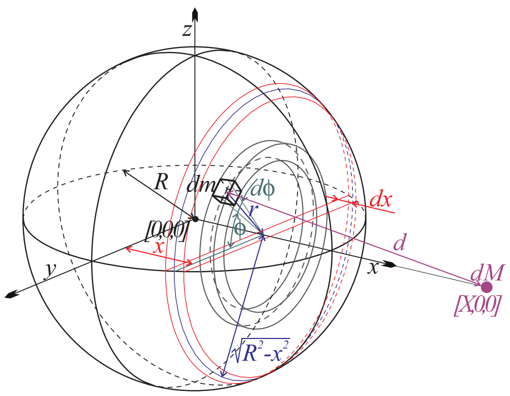
```
> restart; with(plots): with(LinearAlgebra): R:=sqrt((X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2):
> Lx:=9*T/2; Ly:=2*T; Lz:=T/2; Ix1:=Int((X-x)/R^3,x):
> Ix1:=simplify(Eval(Ix1,x=Lx)-Eval(Ix1,x=-Lx)): Ix1:=value(Ix1):
> Ix2:=Int(Ix1,y=-Ly..Ly); Ix2:=combine(value(Ix2),ln,symbolic);
```

$$Ix2 = \ln\left(\frac{(\%1 + \%4)(\%2 + \%5)}{(\%1 + \%5)(\%2 + \%4)}\right), \text{missä} \quad \begin{array}{l} \%1{=}-2Y-4T,\ \%2{=}-2Y+4T \\ \%3{=}4X^2+97T^2+4Y^2+16YT+4Z^2+4z^2-8Zz \\ \%4{=}\sqrt{\%3+36XT},\ \%5{=}\sqrt{\%3-36XT}. \end{array} \tag{6}$$

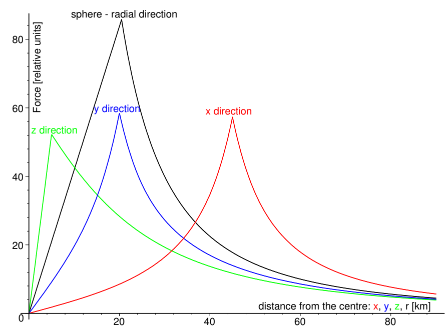
Symboliset lausekkeet ovat mutkikkaita, joten lopullista kiihtyvyyskomponentin A_x laskemista ei suoriteta symbolisesti. Sen sijaan muodostetaan komponentille A_x laskemismenetelmä, joka suorittaa numeerisen integroinnin massapisteen m sijaintikohdassa $[X, Y, Z]$. Käytetään 10 merkitsevän numeron tarkkuutta. Integrointia varten tulee ensin valita monoliitin lyhimmän sivun pituus, koska sen tarkkaa arvoa ei ole mainittu missään julkaisuista [1-4]. Oletetaan jatkossa, että $T = 10$ km.

```
> T:=1e5; Ax:=(a,b,c)->evalf(Int(subs(X=a,Y=b,Z=c,Ix2),z=-Lz..Lz,epsilon=10),10);
```

Voimme nyt esittää monoliitin gravitaatiovoimien kuvaajat eri koordinaattiakseleiden suuntaan ja verraata niitä homogeenisen pallon vastaavaan tilanteeseen. Pallon ja monoliitin massat ja massatiheydet ovat samat. Monoliitin gravitaatiovoiman käyrä X-akselin suuntaan on merkitty punaisella, Y-akselin suuntaan sinisellä ja Z-akselin suuntaan vihreällä. Pallon gravitaatiovoiman käyrä säteen suuntaan on väriltään musta. Kuvan 2 käyristä nähdään, että gravitaatiovoima monoliitin ympäristössä on hyvin erilainen kuin gravitaatiovoima pallon ympäristössä.



Kuva 1: Gravitaatiovuorovaikutus pallon ja massapisteen dM välillä.



Kuva 2: Monoliitin ja pallon gravitaatiovoimat.

4 Liike monoliitin gravitaatiokentässä

Kappaleen liike monoliitin gravitaatiokentässä voidaan ratkaista Newtonin [5] standardimuotoisia liikkeyhtälöitä käyttäen:

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{P}\,(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{A}\,(t)\,, \quad \vec{P}\,(0) = [X_0, Y_0, Z_0]\,, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\,\vec{P}\,(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = [V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0}]\,. \tag{7}$$

Tämä on epälineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä, jolla ei tässä tapauksessa ole analyyttistä ratkaisua. Numeeriset gravitaatiokiihtyvyyden (vektori) ratkaisut tulee lisäksi laskea jokaisella askeleella - ks. (6). Tämä vektori tulee laskea numeerisen integroinnin avulla, joten ei voida käyttää Maplen `dsolve`-komentoa. Muunnetaan ensin differentiaaliyhtälöryhmä (7) vastaavaksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi käyttäen tietoa, että $\frac{d\,\vec{P}(t)}{dt} = \vec{V}\,(t)$ ja $\frac{\mathrm{d}\,\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{A}\,(t)$.

Seuraavaksi kirjoitetaan Runge-Kutta -menetelmään pohjautuva proseduuri `Step`, joka ratkaisee numeerisesti yhtälöt (7) annetuista alkuehdoista lähtien. Tämä proseduuri on hyvin samankaltinen kuin julkaisussa [2] ja se tarkistaa paikan muutokseen liittyvän askeleen pituuden. Jos askel on liian lyhyt tai pitkä verattuna oletusarvoon `DL`, aika-askel `dt` muuttuu vastavasti.

```
> FV:=(t,X,Y,Z,Vx,Vy,Vz)->[Vx,Vy,Vz]; FA:=(t,a,b,c,Vx,Vy,Vz)->
   [evalf(Int(subs(X=a,Y=b,Z=0,Ix2),z=Lz..Lz,epsilon=10),10),
    evalf(Int(subs(X=a,Y=b,Z=0,Iy2),x=-Lx..Lx,epsilon=10),10),
    evalf(Int(subs(X=a,Y=b,Z=c,Iz2),y=-Ly..Ly,epsilon=10),10)];
> Step:=proc(nu) local pv1,pv2,pv3,pv4,vv1,vv2,vv3,vv4,DPV,dl;
    global n,t,dt,Pos,PV,W,VV,Tau;
    pv1:=dt*evalf(FV(t,Pos[],W[])): vv1:=dt*evalf(FA(t,Pos[],W[])):
    pv2:=dt*evalf(FV(t+dt/2,(Pos+pv1/2)[],(W+vv1/2)[])):
    vv2:=dt*evalf(FA(t+dt/2,(Pos+pv1/2)[],(W+vv1/2)[])):
    pv3:=dt*evalf(FV(t+dt/2,(Pos+pv2/2)[],(W+vv2/2)[])):
    vv3:=dt*evalf(FA(t+dt/2,(Pos+pv2/2)[],(W+vv2/2)[])):
    pv4:=dt*evalf(FV(t+dt,(Pos+pv3)[],(W+vv3)[])):
    vv4:=dt*evalf(FA(t+dt,(Pos+pv3)[],(W+vv3)[])): #... New Lines for StepPE
    DPV:=1/6*(pv1+2*pv2+2*pv2+pv4): dl:=sqrt(add(w^2,w=DPV));
    if dl>DL then dt:=dt/2; elif dl*8<DL then dt:=dt*2;
      else n:=n+1; t:=t+dt; Pos:=Pos+DPV; PV:=[PV[],Pos];
           W:=W+1/6*(vv1+2*vv2+2*vv3+vv4): VV:=[VV[],W];Tau:=[Tau[],t];
  end if: end proc;
```

Oletetaan, että pieni kappale lähtee putoaamaan lepotilasta, kun tasossa $Z = 0$, etäisyys kappaleeseen on alussa neljä kertaa sivun L_y pituus ja sijaintikulma vaihtelee 10° välein. Jokainen aika-askel talletetaan muuttujaan `TTau`, nopeusvektori muuttujaan `TVV` ja paikkavektori muuttujaan `TPV`.

```
> Nu:=9; TPV:=[]: TVV:=[]: TTau:=[]:
> for i from 0 to Nu do;
    Pos:=[4*Ly*cos(pi*i/2/Nu),4*Ly*sin(pi*i/2/Nu),0]; W:=[0,0,0]; #Initial Conditions
    t:=0; dt:=0.125; DL:=1000; n:=0; PV:=[Pos]; VV:=[W]; Tau:=[0];
    while not(abs(Pos[1])<Lx and abs(Pos[2])<Ly and Pos[3]<Lz) do; Step(); end do:
    TPV:=[TPV[],PV]: TVV:=[TVV[],VV]; TTau:=[TTau[],Tau];
  end do:
```

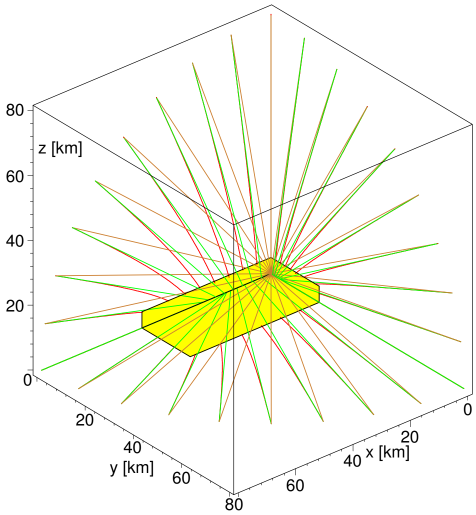
Vapaan pudotuksen radat muille koordinaattitasoille $X = 0$ ja $Y = 0$ voidaan laskea vastaavalla tavalla, katso kuva 3. Piirtokomentoja ei esitetä tässä erikseen. Vapaan pudotuken radat on merkitty punaisella, alkupisteissä ratojen tangentit on merkitty vihreällä ja vapaan pudotuksen rata pallokeskisessä gravitaatiokentässä on merkitty ruskealla. Kuvista nähdään että liikeradat monoliitin ja pallon gravitaatiokentäissä ovat merkittävästi erilaiset.

Liikeyhtälöitä (7) voidaan myös käyttää yleisen liikkeen tarkasteluun monoliitin gravitaatiokentässä. Tässä ainoa ero vapaan pudotuksen tilanteeseen on alkuarvojen valinta. Ratojen laskemiseen voidaan käyttää proseduuria `Step`. Oletetaan seuraavassa, että liike tapahtuu tasossa $Z = 0$ alkuasemasta $[Lx, Ly, 0]$ lähtien ja että liikkeen alkuhetkellä nopeusvektori suuntautuu X-akselin suuntaan. Suoritetaan radan laskeminen kahdeksalle eri alkunopeudelle, jotka järjestetään alkunopeuden suuruuden mukaan pienimmästä suurimpaan. Esitetään Maple-komennoista vain yksi ja jätetään muut listaamatta:

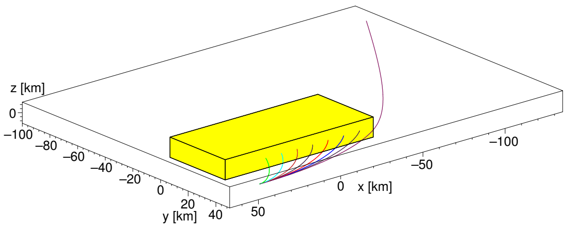
```
> Pos:=[Lx,Lx,0]; W:=[-i*6000,0,0]; #................Initial Conditions .......
```

Kuten kuvasta 4 nähdään, massapiste joko osuu monoliittiin tai lentää sen ympärillä erikoisen muotoisia ratoja pitkin. Tämä viittaa siihen, että stabiilien lentoratojen löytäminen monoliitin ympäri voi olla hyvinkin haasteellista. Tätä havaintoa tukevat myös muut ratojen laskennan variaatiot erilaisia alkuehtoja käyttämällä. Edellä olevan ohjelman koodissa voidaan merkinnän `#Initial Conditions` sisältävä rivi korvata yksinkertaisesti seuraavalla rivillä:

```
> Pos:=[Lx,Lx,3*Lz]; W:=[(-10600-i*200)/sqrt(2),0,(10600+i*200)/sqrt(2)]; #Init.Cond.
```



Kuva 3: Vapaa pudotus monoliitin gravitaatiokentässä.



Kuva 4: Liike tasossa $Z = 0$.

Kuten kuva 5 osoittaa, massapisteellä on varsin erikoisia lentoratoja, jotka lopulta johtavat putoamiseen monoliitin pinnalle. Jos alkunopeutta muutetaan vain hiukan, ovat lentoradat varsin lähellä toisiaan lukuunottamatta loppuvaihetta, jossa voi esiintyä merkittäviä eroja.

5 Tasa-arvopotentiaalipinnat

Tasa-arvopotentiaalipintojen laskemiseksi voidaan käyttää kohtaa (2), josta nähdään että gravitaatiovoima on aina kohtisuorassa tasa-arvopotentiaalipintaa vastaan. Käytetään tasa-arvopotentiaalipintojen laskemiseksi ja visualisoimiseksi myös monoliitin tasosymmetrioita piirtämällä monoliitin symmetristen tasojen ja tasa-arvopotentiaalipintojen väliset leikkauskäyrät. Aluksi meidän tulee määrittää tasa-arvopotentiaalipinnan etäisyys monoliitin keskipisteestä. Tähän voidaan käyttää energian säilymislakia. Sijoitetaan origo monoliitin keskipisteen ja ajatellaan sieltä lähetettäväksi massapiste jokaisen koordinaattiakselin suuntaan tunnetulla nopeudella. Piste, jossa massapisteen liike pysähtyy, vastaa tasa-arvopotentiaalipintaa, jonka potentiaali on $U = v^2/2$. Tämän pisteen koordinaatit voidaan löytää alla esitetyllä proseduurilla `StepPE`, joka saadaan proseduurista `Step` muuttamalla kohtaa `# New Lines for StepPE` seuraavat rivit. Tämä tehdään sen vuoksi, että ei ole mahdollista optimoida askelia paikan suhteen liikkeen pysähtyessä. Proseduuriin `StepPE` tulevaa muutosta voidaan luonnehtia seuraavalla rivillä:

```
Pos:=Pos+1/6*(pv1+2*pv2+2*pv2+pv4): W:=W+1/6*(vv1+2*vv2+2*vv3+vv4):
```

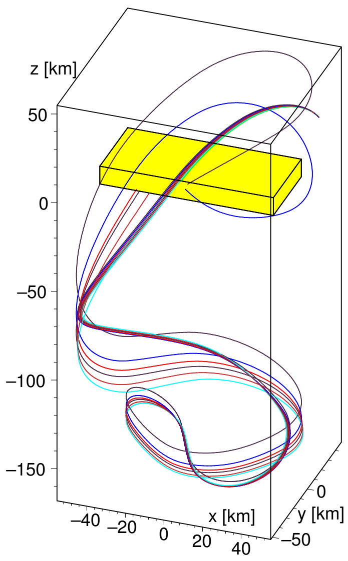
Pysähtymispisteessä gravitaatiokentän suuntavektori voidaan määrittää kaavan (2) mukaisella integroinnilla ja symmetriatasossa voidaan määrittää suuntavektori, joka on kohtisuorassa gravitaatiokentän suuntavektoria vastaan. Tästä jälkimmäisestä suunnasta voidaan määrittää toinen tasa-arvopotentiaalipinnan piste tangenttia seuraten, tosin sanoen ratkaisemalla ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä. Numeerinen ratkaisu tasa-arvopotentiaalipinnalle saadaan käyttämällä proseduuria `StepEQ`:

```
> StepEQ:=proc(O) local pv1, pv2, pv3, pv4, DPV, dl; global n, t, dt, Pos, PV, Tau;
   pv1:=dt*evalf(FA(t,Pos[])): pv2:=dt*evalf(FA(t+dt/2,(Pos+pv1/2)[])):
   pv3:=dt*evalf(FA(t+dt/2,(Pos+pv2/2)[])): pv4:=dt*evalf(FA(t+dt,(Pos+pv3)[])):
   DPV:=1/6*(pv1+2*pv2+2*pv2+pv4): dl:=sqrt(add(w^2,w=DPV));
   if dl>DL then dt:=dt/2; elif dl*8<DL then dt:=dt*2;
     else n:=n+1; t:=t+dt; DPV:=map(u->`if`(u=0,0,signum(u)*DPV[abs(u)]),O);
        Pos:=Pos+DPV; PV:=[PV[],Pos]; Tau:=[Tau[],t];
  end if: end proc;
```

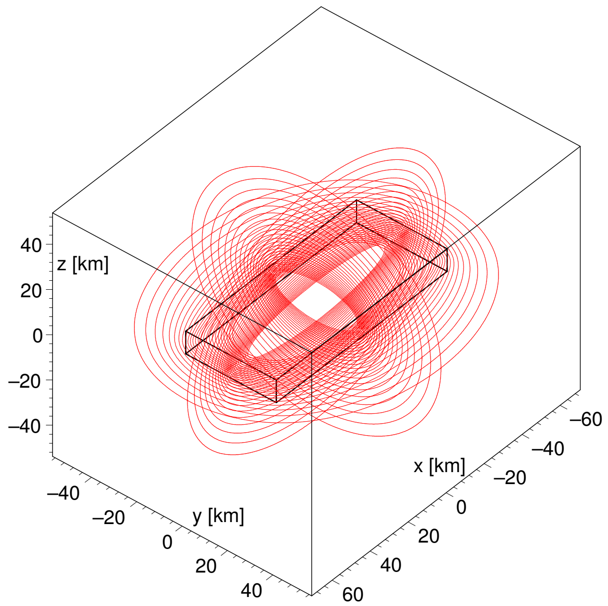
Tasa-arvopotentiaalipinnan koordinaatit voidaan nyt laskea seuraavan koodin avulla:

```
> TPV:=[]: i:='i':
> for i from 25 to 50 do;
    W:=[0,i*1000,0]; Pos:=[0,0,0]; VV:=[W];  t:=0; dt:=0.005; n:=0;
    PV:=[Pos]; Tau:=[0]; DL:=1500;
      while W[2]>0 do; StepPE(); end do:
      while abs(dt)>1e-5 do; dt:=-W[2]/FA(t,Pos[],W[])[2]; StepPE(); end do:
      PV:=[Pos];dt:=0.025; while Pos[2]>0 do; StepEQ([-2,1,0]): end do:
      TPV:=[TPV[],map(u->u[1..2],PV)];
  end do:
```

Tilan säästämiseksi piirto-ohjelmia ei esitetä tässä eikä myöskään tasa-arvopotentiaalipintojen laskemista jäljelle jääville symmetriatasoille. Ne kaikki esitetään kuitenkin visuaalisesti kuvassa 6.



Kuva 5: Yleinen alkunopeuden suunta.



Kuva 6: Tasa-arvopotentiaalipinnat.

6 Johtopäätökset ja loppupohdinta

Lentoratojen laskennan tulokset poikkeavat totutusta maan vetovoimakentässä tapahtuvasta liikkeestä. Erityisesti vapaan pudotuksen radat kuvassa 3 ja epästabiilit lentoradat kuvassa 5 ovat aika erikoisia. Erot voidaan kuitenkin selittää varsin yksinkertaisesti, koska maan vetovoimakentässä gravitaation ja liikkeen pystysuorat suunnat ovat identtiset ja pallon vetovoimakenttä suuntautuu aina kohti pallon keskipistettä. Tilanne on monoliitin tapauksessa kuitenkin erilainen. Esimerkiksi jos kappale liikkuu monoliitista poispäin Z-akselin suuntaan, se voi silti värähdellä kohtisuorissa suunnissa. Tämä käy hyvin esille kuvasta 5.

Viitteet

[1] Bartoň, S.: *Fyzika I v řešených příkladech.* In Czech. Mendel University, Brno pp. 94-98, 2011, ISBN 978-80-7375-559-1.

[2] Bartoň, S., Krumpholc, T: *Driver's influence on kinematics of articulated bus rear axle.* In: Chleboun, J., Segeth, K., Šístek, J., Vejchodský, T. (Eds.), *Programs and Algorithms of Numerical Mathematics 16.* Institute of Mathematics, Prague, pp. 9-14., 2013, ISSN 978-80-85823-62-2.

[3] Clarke, A., C.: *A Space Odyssey.* Hutchinson, UK, 224p., 1969, ISBN 0-453-00269-2.

[4] Clarke, A., C.: *Odyssey Two.* Granada Publishing, UK, 291p., 1982, ISBN 0-345351713-8.

[5] Newton, I.: *Philosopiae Naturalis Principia Mathematica.* 1687, English translation 1729.